

Loi binomiale

1) Successions d'épreuves indépendantes :

Définition : On dit que deux épreuves aléatoires sont indépendantes lorsque le résultat de l'une n'influence pas le résultat de l'autre.

Autrement dit, pour tout événement E de la première épreuve et tout événement F de la deuxième épreuve, les événements E et F sont indépendants.

Exemples :

- on tire une carte au hasard dans un paquet de 32 cartes et on regarde sa couleur, puis on lance un dé cubique et on note le nombre obtenu.

Ici, la couleur de la carte obtenue n'influence en rien le résultat du lancer de dé, les deux épreuves sont donc indépendantes.

- une urne contient des boules colorées et numérotées. On tire une boule, on note sa couleur et on la remet dans l'urne, puis on retire une boule et on note son numéro.

Puisqu'on a remis la boule après le premier tirage, la couleur de la boule tirée lors de la première épreuve n'influence pas le numéro de la boule tirée lors de la seconde épreuve. Ces deux épreuves sont donc indépendantes.

Propriété : Soit deux épreuves indépendantes d'univers respectifs Ω_1 et Ω_2 .

La succession de ces deux épreuves a pour univers le produit cartésien $\Omega_1 \times \Omega_2$.

Démonstration : Une issue de la succession de ces deux épreuves est la donnée d'une issue de la première épreuve et d'une issue de la seconde épreuve, autrement dit un couple $(x_1 ; x_2)$ où $x_1 \in \Omega_1$ et $x_2 \in \Omega_2$. C'est donc bien un élément du produit cartésien $\Omega_1 \times \Omega_2$.

Exemple : Un menu propose 3 plats (P_1, P_2 et P_3) et 2 desserts (D_1 et D_2).
Un client choisit un plat au hasard, puis, de manière indépendante, un dessert au hasard.

L'univers du choix du plat est $\Omega_1 = \{P_1, P_2, P_3\}$ et celui du choix du dessert est $\Omega_2 = \{D_1, D_2\}$.

L'univers de cette expérience aléatoire est donc :

$$\Omega_1 \times \Omega_2 = \{(P_1 ; D_1) ; (P_1 ; D_2) , (P_2 ; D_1) , (P_2 ; D_2) ; (P_3 ; D_1) ; (P_3 ; D_2)\}$$

Propriété (admise) : Lors d'une succession de n épreuves indépendantes, la probabilité d'une issue $(x_1 ; x_2 ; \dots ; x_n)$ est donnée par le produit des probabilités des composantes x_i pour i variant de 1 à n .

Démonstration dans le cas $n = 2$: Soit une succession de 2 épreuves indépendantes.
On considère l'issue $(x_1 ; x_2)$. Soit A l'évènement « l'issue x_1 est réalisée » et B l'évènement « l'issue x_2 est réalisée ».

- Si $P(A) = 0$, alors A est un évènement impossible et donc x_1 n'est jamais réalisée.
On a donc $A = \emptyset$ et $P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0$.
- Si $P(A) \neq 0$, alors $P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A)$.
Puisque les épreuves sont indépendantes, alors les évènements A et B le sont et $P_A(B) = P(B)$.
On obtient donc :

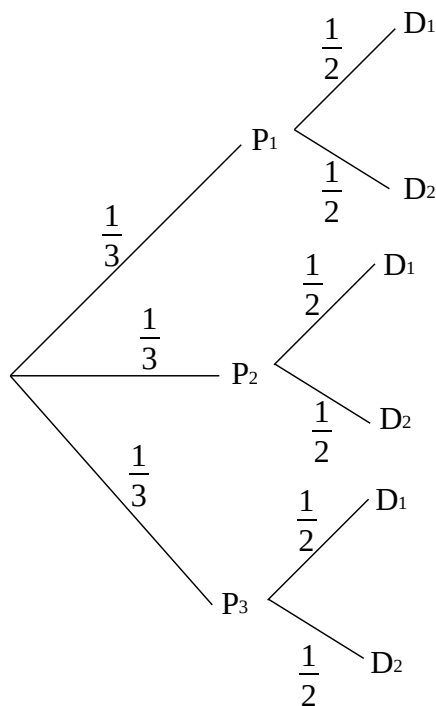
$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Exemple (suite) : On suppose que les choix du plat et du dessert sont équiprobables.

On a alors :

- $P(P_1) = P(P_2) = P(P_3) = \frac{1}{3}$
- $P(D_1) = P(D_2) = \frac{1}{2}$

On peut représenter cette expérience aléatoire sous la forme d'un arbre pondérée :



La probabilité que le client choisisse le troisième plat et le premier dessert est :

$$P(P_3, D_1) = P(P_3) \times P(D_1) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

2) Épreuve de Bernoulli, loi de Bernoulli :

Définitions : Soit p un réel compris entre 0 et 1.

► On appelle épreuve de Bernoulli de paramètre p une expérience aléatoire qui ne comporte que deux issues :

- une issue que l'on nomme « succès » et dont la probabilité est p ;
- une issue que l'on nomme « échec » et dont la probabilité est $1 - p$.

► La variable aléatoire qui prend la valeur 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec est appelée variable aléatoire de Bernoulli .

► La loi de probabilité de cette variable aléatoire est donnée par :

x_i	0	1
$P(X = x_i)$	$1 - p$	p

et est appelée loi de Bernoulli de paramètre p .

Exemple : On lance une pièce truquée dont la probabilité d'obtenir « pile » vaut $\frac{2}{3}$ et on considère comme succès d'obtenir « pile ».

► Cette expérience aléatoire est une épreuve de Bernoulli de paramètre $\frac{2}{3}$.

► La variable aléatoire X qui vaut 1 lorsqu'on obtient « pile » et 0 suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{2}{3}$:

x_i	0	1
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

Propriété : Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre p , alors :

- $E(X) = p$
- $V(X) = p(1 - p)$
- $\sigma(X) = \sqrt{p(1 - p)}$

Démonstration :

- $$E(X) = 0 \times (1 - p) + 1 \times p = p$$
$$V(X) = (0 - p)^2 \times (1 - p) + (1 - p)^2 \times p$$
$$= p^2(1 - p) + (1 - p)^2 p$$
- $$= p(1 - p)[p + (1 - p)]$$
$$= p(1 - p)$$
- $$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{p(1 - p)}$$

Exemple (suite) : On reprend l'exemple de la pièce truquée telle que la probabilité d'obtenir « pile » est $\frac{2}{3}$ et de la variable aléatoire de Bernoulli X associée.

Dans ce cas :

- $E(X) = \frac{2}{3}$: pour un grand nombre de lancer, on aura en moyenne $\frac{2}{3}$ de succès.
- $V(X) = \frac{2}{3}(1 - \frac{2}{3}) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$
- $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{2}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$

3) Loi binomiale :

a) Schéma de Bernoulli :

Définition : On appelle schéma de Bernoulli de paramètres n et p une succession de n épreuves de Bernoulli de paramètres p , toutes indépendantes.

Exemple (suite) : On lance la pièce truquée des exemples précédents 10 fois de suite et on considère à chaque fois « obtenir pile » comme un succès.

Cette expérience constitue un schéma de Bernoulli de paramètre 10 et $\frac{2}{3}$.

Propriété : L'univers d'un schéma de Bernoulli de paramètres n est $\{0; 1\}^n$.

Démonstration : Chaque épreuve du schéma de Bernoulli ne possède que deux issues : 0 en cas d'échec, 1 en cas de succès.

Le résultat d'un schéma de Bernoulli est donc un n -uplet d'éléments de l'ensemble $\{0; 1\}$.

Son univers est donc bien le produit cartésien $\{0; 1\}^n$.

Le cardinal de l'univers d'un schéma de Bernoulli de paramètres n et p est donc 2^n .

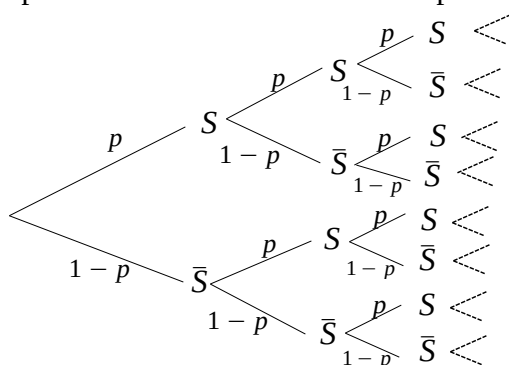
Exemple (suite) : dans l'exemple précédent, l'univers est $\{0; 1\}^{10}$ et il y a $2^{10} = 1024$ issues possibles.

Propriété : On considère un schéma de Bernoulli de paramètres n et p .

Pour tout entier k , $0 \leq k \leq n$, le nombre d'issues comportant k succès est égal à $\binom{n}{k}$.

Démonstration :

On considère un schéma de Bernoulli de paramètres n et p et on note S l'évènement succès. On peut le représenter sous forme d'un arbre pondéré :



A chaque issue comportant k succès correspond un chemin avec k succès.
Or, chaque chemin est un n -uplet de $\{S; \bar{S}\}^n$.

Choisir un chemin comportant k succès revient donc à choisir k succès parmi les issues des n épreuves.

Il y a donc autant de chemin avec k succès que de combinaisons de k éléments parmi n .

On en déduit qu'il existe donc $\binom{n}{k}$ chemins avec k succès, soit $\binom{n}{k}$ issues comportant k succès.

b) Loi binomiale :

Définition : Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès obtenus dans un schéma de Bernoulli de paramètres n et p .

La loi de cette variable aléatoire est appelée loi binomiale de paramètres n et p , notée $\mathcal{B}(n; p)$.

Exemple : Dans une urne, il y a 10 boules bleues, 5 boules rouges et 3 boules vertes, indiscernables au toucher.

On tire 10 fois avec remise une boule et on regarde sa couleur, en considérant « la boule obtenue est verte » comme un succès.

► Les boules sont indiscernables au toucher, tirer une boule dans l'urne revient donc à choisir de manière équiprobable une boule parmi les 18 boules de l'urne. L'évènement S : « obtenir une boule verte » est donc réalisé par 3 issues et $P(S) = \frac{\text{card}(S)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{1}{6}$.

L'épreuve qui considère « obtenir une boule verte » comme succès est donc une épreuve de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{6}$.

► L'expérience aléatoire proposée est une succession de 10 épreuves de Bernoulli toutes de paramètre $\frac{1}{6}$.
Puisque la boule tirée est remise à chaque tirage, tous les tirages sont **indépendants** et cette expérience est un schéma de Bernoulli de paramètres 10 et $\frac{1}{6}$.

► La variable aléatoire qui, à un ensemble de 10 tirages, associe le nombre de boules vertes obtenues suit alors une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{1}{6}$.

Propriété : Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$.

Pour tout entier k , $0 \leq k \leq n$, on a :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

Démonstration :

L'évènement $\{X = k\}$ est constitué de toutes les issues comportant k succès.

Chacune de ces issues est un n -uplet d'éléments de $\{S; \bar{S}\}$ comportant k succès et, donc, $n - k$ échecs.

Or, la probabilité d'un succès S est p et la probabilité d'un échec \bar{S} est $1 - p$, donc la probabilité d'une issue comportant k succès est : $p^k \times (1 - p)^{n-k}$.

Finalement, on a vu précédemment qu'il y avait $\binom{n}{k}$ issues comportant k succès, donc l'évènement $\{X = k\}$ a pour probabilité la somme des probabilités de $\binom{n}{k}$ issues toutes de probabilité $p^k \times (1 - p)^{n-k}$.

Autrement dit :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

Exemples (suite) :

- Dans l'expérience aléatoire précédente, la probabilité d'obtenir exactement 3 boules vertes lors du tirage vaut :

$$\begin{aligned} P(X = 3) &= \binom{10}{3} \times \left(\frac{1}{6}\right)^3 \times \left(\frac{5}{6}\right)^7 \\ &= 120 \times \frac{1}{216} \times \frac{78\,125}{279\,936} \\ &= \frac{9\,375\,000}{60\,466\,176} \\ &\approx 0,16 \end{aligned}$$

La probabilité d'obtenir trois boules vertes est d'environ 0,16.

- Quelle est la probabilité d'obtenir au plus trois boules vertes ?

On cherche ici la probabilité de l'évènement $\{X \leq 3\}$, soit :

$$\begin{aligned} P(X \leq 3) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) \\ &\approx 0,93 \end{aligned}$$

donc, la probabilité d'obtenir au plus trois boules vertes est d'environ 0,93.

- Quelle est la probabilité d'obtenir 5, 6 ou 7 boules vertes ?

On cherche ici la probabilité de l'évènement $\{5 \leq X \leq 7\}$, soit :

$$\begin{aligned} P(5 \leq X \leq 7) &= P(X \leq 7) - P(X < 5) \\ &= P(X \leq 7) - P(X \leq 4) \\ &\approx 0,015 \end{aligned}$$

donc, la probabilité d'obtenir 5, 6 ou 7 boules vertes est d'environ 0,015.

Propriété (admise pour l'instant) : Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$.

On a alors :

$$E(X) = np \text{ et } V(X) = np(1 - p)$$

Exemple : Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(10; 0,2)$, alors :

$$E(X) = 10 \times 0,2 = 2 \text{ et } V(X) = 10 \times 0,2 \times 0,8 = 1,6$$